Equações e Inequações do Lineares e Quadráticas, Polinômios

Lucas Dias

Pré UFSC/UFSC Blumenau

1 Introdução

Considerando as sentenças

(i) $3 + 2 \cdot 6 = 30$

(ii) $3 + 2 \cdot 6 = 15$

(iii) $3 + 2x = 15$

Podemos dizer que:
(a) A sentença (i) é **fechada** e **falsa**, pois $3 + 2 \cdot 6 = 15 \neq 30$.
(b) A sentença (ii) é **fechada** e **verdadeira**, pois $3 + 2 \cdot 6 = 15$.
(c) A sentença (iii) é **aberta**, mas não é nem verdadeira nem falsa, pois x, que é chamado de **variável**, pode assumir qualquer valor. No caso, é verdadeira quando atribuímos a x o valor de 6, e falsa quando atribuímos um valor diferente de 6 a x. Dizemos, então, que 6 é a **raiz** da equação $3 + 2x = 15$. Toda **sentença aberta** na forma de **igualdade** é chamada **equação**.

2 Equação do 1º Grau

- Definição

  Chamamos de equação de 1º grau as equações do tipo:

$$ax + b = 0$$

  em que a e b são números reais e com $a \neq 0$.
  Exemplo:
  $2x + 1 = 7$, ($a = 2$ e $b = -6$)
  3 é a única raiz, então $S = \{3\}$

- Resolução

  Notando que $ax + b = 0 \Leftrightarrow ax = -b \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$ para $a \neq 0$, concluímos que o conjunto-verdade da equação é $S = \{-\frac{b}{a}\}$.
  Exemplo:
  $2x + 1 = 7$
  $2x + 1 - 1 = 7 - 1$
  $2x = 6$
  $\frac{2x}{2} = \frac{6}{2}$
  $x = 3$
  3 é a única raiz, então $S = \{3\}$

- Inequações do 1º Grau

  Inequações são expressões abertas que exprimem uma desigualdade entre as quantidades dadas.
  Uma inequação é dita do 1º grau quando pode ser escrita em uma das seguintes formas:

$$ax + b > 0, \quad ax + b < 0,$$
$$ax + b \geq 0, \quad ax + b \leq 0,$$

  em que $a \neq 0$ e b são números reais.

  Nas inequações do 1º grau valem os princípios aditivos e multiplicativos com uma ressalva. Observe:

$$\text{Se } a > b \text{ então:}$$
$$\forall m \text{ , } a + m > b + m$$
$$\forall m > 0 \text{ , } a \cdot m > b \cdot m$$
$$\forall m < 0 \text{ , } a \cdot m < b \cdot m$$

3 Equação do 2º Grau

- Definição

  Chamamos de equação de 2º grau as equações do tipo:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

  em que a, b e c são coeficientes $\mathbb{R}$ e com $a \neq 0$.

  Exemplo:

  $x^2 - 6x + 5 = 0$, ($a = 2$, $b = -3$ e $c = 5$). 1 e 5 são raízes da equação, então $S = \{1, 5\}$

- Resolução para o caso $c = 0$ e $b \neq 0$

Exemplo:
Resolver em $\mathbb{R}$ a equação:

$$x^2 + 11x = 0$$

$x^2 + 11x = 0 \Leftrightarrow x(x + 11) = 0$
$x^2 + 11x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x + 11 = 0$
$x^2 + 11x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -11$
Assim:

$$S = \{-11, 0\}$$

- Resolução para o caso $b = 0$ e $c \neq 0$

  Exemplo:
  Resolver em $\mathbb{R}$ a equação:

  $$x^2 - 16 = 0$$

  $x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{16} \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow x = -4$ ou $x = +4$
  Assim:

  $$S = \{-4, +4\}$$

- Resolução do caso geral

  Resolveremos as equações do 2º grau com coeficientes a, b e c, o que nos permite estabelecer uma fórmula bastante conhecida, chamada "fórmula de Bháskara", a qual resolverá qualquer equação do 2º grau, bastando substituir os coeficientes pelo número na equação a resolver.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ em que } \Delta = b^2 - 4ac$$

1. Caso $\Delta > 0 \rightarrow$ A equação terá duas raízes reais e distintas. **Exemplo** - Resolver em $\mathbb{R}$:
   $x^2 - 6x - 27 = 0$
   $a = 1$, $b = -6$ e $c = -27$
   $\Delta = (-6)^2 - 4(1)(-27) = 144 > 0$

   $$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6 \pm \sqrt{144}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 12}{2}$$
   $$x_1 = 9 \text{ ou } x_2 = -3$$

   Observe que $x_1 \neq x_2$.
   Assim: $S = \{-3, 9\}$

2. Caso $\Delta = 0 \rightarrow$ A equação terá duas raízes reais e iguais.

   Exemplo - Resolver em $\mathbb{R}$:
   $4x^2 - 4x + 1 = 0$
   $a = 4$, $b = -4$ e $c = 1$
   $\Delta = (-4)^2 - 4(4)(1) = 16 - 16 = 0$

   $$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 \pm 0}{8}$$
   $$x_1 = \tfrac{1}{2} \text{ ou } x_2 = \tfrac{1}{2}$$

   Observe que $x_1 = x_2$.
   Assim: $S = \{\frac{1}{2}\}$

3. Caso $\Delta < 0 \rightarrow$ A equação não terá raízes reais.

   Exemplo - Resolver em $\mathbb{R}$:
   $3x^2 + 2x + 4 = 0$
   $a = 3$, $b = 2$ e $c = 4$
   $\Delta = (2)^2 - 4(3)(4) = -44 < 0$

   $$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{-44}}{6}$$

   $\sqrt{-44} \notin \mathbb{R}$ então não há raízes reais.
   Assim: $S = \varnothing$

4 Relações de Girard

Sendo x_1 e x_2 as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, tem-se:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

5 Equações Redutíveis a 1º ou 2º grau

Se a equação proposta não é do 1º grau nem do 2º grau, deve-se, se possível:

- Fatorar

  Exemplo:

  $x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0 \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow x^2 \cdot (x - 4) - 1 \cdot (x - 4) = 0 \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow (x - 4) \cdot (x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow x - 4 = 0$ ou $x^2 - 1 = 0$
  Logo: $S = \{-1, 1, 4\}$

- Troca de Variáveis

  Exemplo:

  $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ pode ser transformado em $t^2 - 5t + 4 = 0$, substituindo x^2 por t.
  Assim: $t^2 - 5t + 4 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5 \pm 3}{2} \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow t = 4$ ou $t = 1$
  Voltando para a incógnita inicial x, temos:
  $x^2 = 4$ ou $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 2$ ou $x = \pm 1$
  Logo $S = \{-1, 1, -2, 2\}$

6 Polinômios

- Definição

  Denominamos **Polinômio**, funções do tipo:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

  em que $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$ e $a_1 \in \mathbb{R}$, dizemos que os números $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ são os **coeficientes** e a_0 é o **termo independente** do polinômio.
  Exemplo:

$$P(x) = 5x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \sqrt{3}x - 1$$

- Grau de um Polinômio

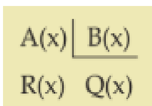
  O grau do polinômio que indicamos por G_p, é determinado pelo maior expoente de x com coeficiente diferente de zero.
  Quando o polinômio é nulo, o seu grau não é definido.
  Exemplo:

$$P(x) = 1 + 2x^5 + 3x^2 + x^3 \Rightarrow G_p = 5$$

7 Divisão de Polinômios

- Definição

  Dados dois polinômios, $A(x)$ e $B(x)$, B não nulo, existe um único par de polinômios $Q(x)$ e $R(x)$ em que se verificam as condições:
  1ª) $A(x) \equiv B(x) \cdot Q(x) + R(x)$
  2ª) $G_r < G_b$ ou $R(x) \equiv 0$



Os polinômios A e B são chamados de **dividendo** e **divisor** e os polinômios Q e R são o **quociente** e o **resto**.
Quando $R(x) \equiv 0$, dizemos que a divisão é exata, ou que $A(x)$ é divisível por $B(x)$.

- Método da Chave

  Dividir o polinômio $A(x)$ pelo polinômio $B(x)$, não-nulo, significa determinar o quociente $Q(x)$ e o resto $R(x)$.
  Vamos dividir, por exemplo, o polinômio $A(x) = 2x^3 - 8x^2 + 7x - 5$ por $B(x) = x^2 - 2x + 3$, pelo método da chave.

  - **1ª etapa**

    Dividimos inicialmente $3x^3$ por x^2, encontrando 2x.

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - 8x^2 + 7x - 5 & x^2 - 2x + 3 \\ \cline{2-2} & 2x \end{array}$$

  - **2ª etapa**

    Multiplicamos $2x$ por $x^2 - 2x + 3$ e vemos "quanto falta para $2x^3 - 8x^2 + 7x - 5$", isto é, subtraímos:

$$2x^3 - 4x^2 + 6x \text{ de } 2x^3 - 8x^2 + 7x - 5.$$

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - 8x^2 + 7x - 5 & x^2 - 2x + 3 \\ \cline{2-2} \underline{-2x^3 + 4x^2 - 6x \quad} & 2x \\ -4x^2 + x - 5 & \end{array}$$

  - **3ª etapa**

    Enquanto o grau do resto for maior ou igual ao grau do divisor, continuamos a divisão. Dividindo então $-4x^2$ por x^2, encontrando -4.

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - 8x^2 + 7x - 5 & x^2 - 2x + 3 \\ \cline{2-2} \underline{-2x^3 + 4x^2 - 6x \quad} & 2x - 4 \\ -4x^2 + x - 5 & \end{array}$$

  - **4ª etapa**

    Multiplicamos -4 por $x^2 - 2x + 3$ e vemos "quanto falta para $-4x^2 + x - 5$".

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - 8x^2 + 7x - 5 & x^2 - 2x + 3 \\ \cline{2-2} \underline{-2x^3 + 4x^2 - 6x \quad} & 2x - 4 \\ -4x^2 + x - 5 & \\ \underline{+4x^2 - 8x + 12} & \\ -7x + 7 & \end{array}$$

Nesse ponto terminamos a divisão, pois o grau de $-7x+7$ é menor que o grau do divisor.
Portanto, temos:
Quociente $= Q(x) = 2x - 4$ Resto $= R(x) = -7x + 7$